Éducation et didactique

7-1 | 2013
Varia

Enquête sur la notion de « pedagogical content knowledge », interrogée à partir du « site local d'une question »

Investigation of the notion of "pedagogical content knowledge", from the point of view of the "local site of a question"

Christian Silvy, Antoine Delcroix et Alain Mercier

OpenEdition Journals

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/educationdidactique/1442
DOI : 10.4000/educationdidactique.1442
ISSN : 2111-4838

Éditeur
Presses universitaires de Rennes

Édition imprimée
Date de publication : 7 février 2013
Pagination : 33-58
ISBN : 978-2-7535-2261-9
ISSN : 1956-3485

Référence électronique
Christian Silvy, Antoine Delcroix et Alain Mercier, « Enquête sur la notion de « pedagogical content knowledge », interrogée à partir du « site local d'une question » », *Éducation et didactique* [En ligne], 7-1 | 2013, mis en ligne le 31 janvier 2015, consulté le 02 mai 2019. URL : http://journals.openedition.org/educationdidactique/1442 ; DOI : 10.4000/educationdidactique.1442

ENQUÊTE SUR LA NOTION DE « PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE », INTERROGÉE À PARTIR DU « SITE LOCAL D'UNE QUESTION »

Christian Silvy, CRREF, Université Antilles-Guyanne
Antoine Delcroix, CRREF, Université Antilles-Guyanne
Alain Mercier, ADEF, Aix-Marseille Université, ENS Lyon/IFE

L'article montre l'usage possible de la notion de « site local d'une question » dans le travail du professeur se préparant à enseigner cette question. On discute à cette occasion les proximités entre la description de ce qu'il y a à savoir profondément, pour répondre aux difficultés ou obstacles que rencontreront les élèves au cours de l'étude d'une question, et ce que Shulman et ses successeurs modélisent sous le terme de « pedagogical content knowledge ». Une enquête auprès de professeurs actuels montre comment ils sont démunis face aux difficultés des élèves, et une enquête dans des ouvrages d'enseignement anciens montre comment le problème soulevé a été traité en pratique par l'enseignement traditionnel. L'article discute alors le problème de la formation que les professeurs seraient en droit d'attendre.

Mots-clés : didactique des mathématiques, site d'une question à l'étude, approche anthropologique d'un objet d'enseignement, situation didactique, domaine de réalité, pedagogical content knowledge.

Investigation of the notion of "pedagogical content knowledge", from the point of view of the "local site of a question"

This paper shows how the notion of "local site of a question" helps the teacher to get into this question in order to teach it. We discuss the relationship between the description of what has to be deeply known to answer the difficulties or the obstacles which arise for the pupils during the study of a question, and what Shulman, and his successors, model under the name of pedagogical content knowledge. A survey, conducted among current French teachers, shows how they are powerless when facing the difficulties of their pupils and a study of some old teaching books shows how this problem was addressed in former teaching practices. Based on these results, we open the discussion of the training of the teachers.

Keywords: didactics of the mathematics, local site of a question, anthropological approach of a teaching object, didactic situation, domain of reality, pedagogical content knowledge.

INTRODUCTION

Les mathématiques qui devraient être disponibles (aux élèves ou à leur professeur) dans l'attaque d'une question peuvent être décrites comme le site mathématique de la question. Ainsi, Duchet et Erdogan (2005) ont montré comment les objets de ce site étaient mobilisés par le professeur lorsqu'il organise l'étude que les élèves ont à conduire et qu'il les accompagne efficacement. Cependant, du point de vue de l'élève qui étudie la question, les mathématiques qu'il utilise sont obtenues par réorganisation et reconstruction des savoirs qu'il a déjà rencontrés, comme l'a montré Mercier (1996). Nous montrons ici que cette construction nouvelle ne se compose pas seulement de mathématiques, et doit être menée dans les deux composantes de ce que nous appelons le site local, formé du site mathématique pour l'institution concernée et de ce que Silvy et Delcroix (2009) ont nommé un substrat de connaissances non mathématisées.

L'étude des savoirs et connaissances mobilisées dans une des « réponses » possibles à une question montre en effet que pour produire cette réponse l'élève n'a pas besoin seulement d'une organisation mathématique au sens de Chevallard (2002). Cette organisation n'est que la partie immédiatement visible du site local de la question, car la mobilisation de ces mathématiques suppose d'un côté des connaissances mathématiques plus lointaines et de l'autre, des connaissances non nécessairement mathématiques qui sont le substrat du site local. Comme professeur, pour diriger l'étude de la question ou pour aider un élève à réaliser cette étude et à produire une solution, il faut en effet a minima avoir identifié non seulement les objets pertinents de son site mathématique décrits par Erdogan et Duchet, mais encore « des choses[1] » qui sont mobilisées dans le travail, parfois sans qu'elles aient un nom, et il faut aussi savoir comment ces choses sont connues des élèves.

Plusieurs questions se posent alors : la connaissance de ces choses peut-elle être enseignée, comment le professeur va-t-il pouvoir les désigner, comment certains élèves se les sont rendues disponibles ? Si ces connaissances appartiennent à leur mémoire personnelle (Matheron, 2002) de certaines pratiques antérieures, cela ouvre de nouvelles questions : ces connaissances ont-elles été introduites comme des préconstruits[2], sont-elles proto-mathématiques[3] (Chevallard, 1985a), ou faut-il les considérer dans une acception plus large ? Peuvent-elles, doivent-elles, à terme, être nommées et considérées comme du savoir ?

Nous appellerons domaine de réalité l'ensemble des choses utiles dans l'attaque de la question, parce que leur présence effective est nécessaire pour qu'une voie d'attaque puisse être pensée et qu'une conduite stratégique soit développée. Si les choses d'un domaine de réalité sont partagées dans un groupe où une question s'étudie collectivement, il existe sans doute des manières de dire qui en témoignent (même si ces manières n'anticipent pas une mathématisation). Ces manières de dire vont soutenir les manières de faire ou les bricolages techniques développés pour répondre à la question. Nous proposerons alors l'hypothèse de travail suivante : ces manières de dire qui accompagnent et régulent l'usage des choses utiles dans l'attaque d'une question ont, pour qui étudie, les propriétés d'une théorie locale du domaine de réalité où se pose la question. Considérées dans le cadre des théories didactiques, ces manières de dire fondent une situation où former une expérience de la question.

Si le modèle que nous développons à partir de la notion de site est pertinent, alors nous devrons considérer que certains éléments de connaissance non mathématique auraient des fonctions théoriques[4] pour la pratique mathématique, puisque ces éléments fonderaient l'action dans un domaine de réalité où une question est posée, en apparaissant aux acteurs comme des connaissances partagées permettant d'imaginer une stratégie d'action pour attaquer la question.

L'objet de notre article est d'instruire notre hypothèse. Nous montrerons d'abord dans une première partie que les éléments d'une théorie pour la pratique scolaire d'une discipline enseignée appartiennent à ce que Shulman (1986) appelle pedagogical content knowledge (PCK), c'est-à-dire la connaissance à usage pédagogique du contenu de l'enseignement. Nous suivrons alors Ma (1999) qui, dans la ligne ouverte par Shulman, affirme que cette connaissance, le PCK, possède une fonction de théorie pour la pratique scolaire. Mais nous irons plus loin que ces auteurs en montrant que les connaissances du PCK ne sont pas nécessairement mathématiques, et qu'elles ouvrent l'espace d'un domaine de réalité[5]. Les résultats de ce premier mouvement nous conduiront à travailler comme Ma (1999), sur les discours des professeurs, et leur capacité à aider leurs étudiants face à un problème délicat.

En deuxième partie nous reprendrons donc dans le contexte français une partie d'une étude de An, Kulm et Wu (2004) sur un problème de « rapports et proportions ». Cette étude a été menée dans les contextes américain et chinois, et nous introduisons ainsi un élément tiers dans la comparaison. Les résultats de notre enquête auprès des professeurs et la construction, l'analyse et l'exploitation du site local de l'activité considérée dans cette étude nous semblent conforter l'idée que les phénomènes observés sur le PCK n'appartiennent pas à l'épistémologie des professeurs mais bien plutôt à l'anthropologie du savoir enseigné, c'est-à-dire aux propriétés de l'expérience qui fondent la manière dont les questions sont comprises à la fois par les élèves et les professeurs. Nous le vérifions localement, en enquêtant auprès d'élèves.

Dans notre troisième partie, nous explorons donc l'idée que, en France aujourd'hui, c'est au niveau du rapport culturel aux pratiques mathématiques que naît la difficulté des professeurs à disposer d'un discours explicatif des techniques qu'ils enseignent. Nous interrogeons donc plus avant la notion de PCK. Nous analyserons ici diverses propositions d'enseignement « classiques » afin de montrer, dans des cas variés mais pour nous exemplaires, comment dans un processus didactique, une fonction théorique était jouée, avant la réforme moderniste des années 70, par des objets non mathématiques et certaines manières de dire ou de faire mises en place à leur propos. Nous étudierons ainsi :

- l'introduction des fractions jusqu'en 1960 (Lemoine, 1920) ; et nous la comparerons à :
- la construction du système de numération décimal dans un manuel d'arithmétique de la fin du XIX[e] siècle (Briot, 1873) ; puis à :
- la manière de construire et interpréter la notion de solution d'équation différentielle dans un manuel de mathématiques supérieures (Smirnov, 1970) où des processus analogues sont à l'œuvre.

Nous conclurons alors en affirmant que, l'action didactique étant une action conjointe (Sensevy et Mercier, 2007), son efficacité suppose l'intervention de manières de dire (faisant fonction de technologies ou théories) qui sont de l'ordre du logos pour les manières de faire (se présentant comme des techniques) que doivent partager élèves et professeur, au terme du processus didactique relatif à un contenu quel qu'il soit : ce qu'avaient commencé de montrer en effet Assude, Sensevy et Mercier (2006). Mais ils avaient considéré que cela relevait seulement de la construction d'une référence commune de l'action conjointe et non pas de la production d'une théorie partagée, fondatrice des techniques de l'action dans un domaine de réalité faisant référence, génératrice[6] des situations didactiques où la matière de l'enseignement et les enjeux de l'étude peuvent s'éprouver. Nous avons l'ambition de montrer, dans les cas que nous aurons examinés, que la question est plus délicate que celle d'une référence commune d'une action conjointe à visée didactique : nous la pensons en termes de situation didactique, un concept qui nous apparaît incontournable.

Le PCK vs l'épistémologie pratique des professeurs

Le professeur qui cherche à aider les élèves dans l'étude d'une question peut soit les accompagner en leur signalant leurs idées pertinentes ce qui lui permet de les orienter en leur ouvrant de nouvelles questions, soit procéder à l'analyse de leur production en tenant une position d'expert connaissant par avance « la » réponse. Les professeurs jouent de ces deux positions, selon les temps d'un processus didactique et de manière différente selon leur style personnel, pour réguler l'activité d'étude et de recherche à visée didactique qu'ils organisent (Schubauer-Leoni et Dolz, 2004). On a montré qu'ils peuvent ainsi produire avec les élèves des objets symboliques et langagiers qui soutiendront la mémoire collective de la classe (Mercier, Schubauer-Leoni, Matheron, Quilio & Leutenegger, 2003 ; Centeno, 1995 ; Brousseau et Centeno, 1991 ; Brousseau, 2004). Pour tenir la position d'accompagnant, le professeur a besoin d'entrer avec les élèves dans un discours référé à leurs pratiques communes. Ce discours permet au collectif qu'est la classe de réinterpréter la question, pour lui donner du sens. Il faut donc que le professeur dispose en professionnel de théories du domaine de réalité où l'action se déploie. Ces théories sont indispensables à la pratique mathématique des élèves mais souvent, nous allons constater qu'elles ne peuvent être produites dans le seul cadre de la classe : elles organisent des connaissances du quotidien et sont des théories locales, ou naïves[7] qu'un regard scientifique (savant) extérieur au monde didactique considérerait soit comme des représentations sociales soit comme des idées fausses ou préconçues.

La position de Ma

Selon Ma (1999), les différents savoirs à usage didactique qui outillent la profession d'enseignant dans un espace culturel donné, et forment le PCK ou savoir pour enseigner, sont observables. Ces savoirs s'observent par exemple dans le discours que le professeur peut tenir aux élèves pour décrire et contrôler l'usage de certaines techniques mathématiques, qu'ils étudient, mais aussi comme ce que le professeur peut dire et imaginer comme situations permettant d'engager des élèves dans une enquête sur une question mathématique. Le PCK a donc à la fois les deux dimensions de logos et de praxis : nous allons le montrer sur le tout premier exemple choisi par Ma, qui est relatif à la soustraction « avec retenue ». Pour comprendre le travail de cet auteur sur la technique de soustraction dans un cas à retenue du type 62-49, nous dirons que dans l'expression, 62 est le diminuande et 49 le diminueur, formant en français ces termes (qui existent en anglais) à l'image de dividende, multiplicande d'un côté, et de multiplicateur et diviseur, de l'autre (addende est usité pour les deux termes). Ma montre qu'aux États-Unis, les professeurs parlent de la « retenue » comme d'un « emprunt » (borrowing), de « un » fait au « six » des dizaines, puis de la « transformation » (changing) de ce un qui est une dizaine, en dix unités[8]. Ma fait alors deux remarques :

1) Cette description ne montre pas un fait pourtant essentiel, c'est que ces opérations (emprunt et transformation) n'altèrent pas le diminuande 62 et ne sont qu'un réarrangement interne à son écriture, le travail d'une de ses inscriptions additives[9] : et en effet, écrire 62 = 60+2 = 50+12 = 5×101+12×100 fait apparaître 5 et 12, les nombres sur lesquels on opère, et ne change pas le diminuande.

2) Cette procédure est justifiée par la déclaration selon laquelle « on ne peut soustraire un grand nombre d'un plus petit », ce qui est vrai dans les entiers naturels mais faux dans les relatifs. Le problème est que 60 + 2 n'est pas la bonne inscription de 62 pour le calcul à faire, et c'est ce que le professeur devrait dire.

Ma conclut en affirmant qu'on ne peut traiter les chiffres servant à écrire un nombre comme des symboles indépendants sans perdre le sens de l'opération que l'on cherche à effectuer. Il serait bien meilleur de décomposer l'opération en disant que pour soustraire 49 de 62, on en décompose le diminueur 49 = 40 + 9 pour soustraire d'abord 9 de 62, puis 40 du reste 53. On pourrait aussi soustraire d'abord 40 de 62, puis 9 du reste 22 pour obtenir, dans les deux cas, 13. Mais rien ne justifie de « soustraire 9 de 2 », et c'est un non-sens de donner à dire et à penser que « 2 emprunte à son voisin 1 valant 10 afin de pouvoir perdre 9, et qu'alors il restera 3 ».

Cependant, et bien que la plupart des professeurs des États-Unis parlent de borrowing et changing, Ma rencontre aux États-Unis Bernadette, un professeur qui déclare d'abord que la soustraction demandée consiste à ôter un nombre de l'ordre de 40 à un nombre de l'ordre de 60, ce qui est donc possible. Ce professeur propose de poursuivre ainsi, en substance : comme le procédé de soustraction verticale des unités, puis des dizaines ne peut être conduit dans ce cas, il faut donc trouver « ailleurs dans 62 » un nombre dont on puisse ôter 9 sachant qu'il restera quelque chose dont on pourra ôter 40. En disant « ailleurs dans 62 », ce professeur traite 62 comme un nombre et non comme le voisinage formel des deux chiffres indépendants 6 et 2, ce qui est mathématiquement valide et la conduit à la décomposition additive 62 = 50 + 12, qui permet de retrancher 9 + 40. Ma montre ainsi que les professeurs d'une même aire culturelle ont en principe le PCK de leur profession dans cette aire[10], mais que tous n'ont pas nécessairement ce même PCK, dans une société donnée.

Ma poursuit l'enquête et s'aperçoit que la plupart des professeurs enquêtés aux États-Unis utilisent des représentations manipulables des nombres considérés, comme par exemple des paquets de bûchettes que l'on peut défaire, et elle montre que ces manipulations se substituent à l'étude du problème. Car c'est, selon elle, ce type de manipulations supposées concrètes qui conduit élèves, et professeurs à penser emprunt (d'un paquet) et échange (du paquet contre dix bûchettes). Ces professeurs réalisent en effet une substitution didactique d'objet (Mercier, 1992), remplaçant une question relative au système de numération par la manipulation matérielle de « paquets ». En Chine, au contraire, les professeurs parlent de dégroupement d'une unité d'un ordre supérieur, dans l'écriture du diminuande : nous n'en dirons pas plus, sinon que cette manière de dire là est compatible avec une description mathématique de la numération décimale de position comme écriture polynomiale des nombres[11]. Le discours professionnel de Bernadette ou des professeurs chinois permet donc, conclut Ma, de rendre compte des techniques étudiées d'une manière compatible avec une théorie de la numération décimale de position qui viendra bien plus tard ou, peut-être, jamais dans le curriculum des élèves. Il est, pour Shulman (1986), l'effet d'une compréhension profonde du contenu d'enseignement et de l'organisation du curriculum disciplinaire. Cette compréhension ne consiste pas en une description mathématiquement correcte des objets d'enseignement mais en une description pratique du travail des élèves et de ses conditions d'existence qui est juste et efficace parce qu'elle est compatible avec la description mathématique.

Discussion

On peut considérer que le pedagogical content knowledge nomme ce que Brousseau (1998) appelle « l'épistémologie pratique des professeurs ». Car selon cet auteur, les professeurs ont à développer un travail épistémologique qui peut et doit conduire à une compréhension profonde du contenu d'enseignement. La compréhension ainsi obtenue peut se traduire par la production d'une situation fondamentale (pour tel contenu de savoir). Une telle situation comprend les conditions matérielles et cognitives du travail des élèves et de son accompagnement par le professeur. Ces conditions sont des jeux d'apprentissage successifs proposés aux élèves pour qu'ils apprennent (Sensevy, 2011). La situation permet au professeur d'échanger avec les élèves sur ce qu'ils ont à faire pour réussir, étant donné que les jeux ont cette propriété : le joueur peut agir par lui-même (avoir une stratégie) et juger lui-même de son gain (évaluer son action). On peut donc dire que, du point de vue de Brousseau, le PCK est le corps de connaissances professionnelles qui devrait servir au professeur à régler le développement de la situation fondamentale en une série de jeux individuels et collectifs, tels que les élèves puissent développer des connaissances personnelles et produire du savoir mathématique partagé. La demande de Brousseau est si exigeante qu'il n'imagine pas vraiment que des professeurs individuels puissent y satisfaire. Il observe d'ailleurs que seuls les professeurs disposant d'une connaissance profonde des objets et des enjeux d'un enseignement arrivent à mettre en œuvre les ingénieries que produit la recherche et il pense donc devoir appuyer l'action professionnelle sur un travail d'ingénierie et sur les techniques de sa mise en œuvre.

On peut aujourd'hui penser ensemble les positions de Shulman et de Brousseau, par-delà l'opposition qui vient de ce que le premier décrit les pratiques des professeurs dans des cultures didactiques variées et que le second cherche à définir les conditions de l'efficacité épistémologique d'un enseignement.

Nous appellerons pour cela domaine de réalité de la question un ensemble de pratiques et de discours dans lesquelles une question fait sens pour un groupe humain, une société et sa culture : c'est un objet anthropologique. Une situation fondamentale au sens de Brousseau est alors pour nous la production à usage didactique d'un domaine de réalité artificiel, fondant un domaine de réalité à l'usage d'un groupe d'élèves qui enquêterait sous la direction d'un professeur. Ainsi, le professeur doit être capable d'évoquer pour ses élèves ou d'installer et de leur faire vivre un domaine de réalité anthropologique artificiel (scolaire) permettant d'accéder à l'étude d'un thème, d'un secteur ou d'un domaine mathématique (selon la portée de la question). Cependant, dans la visée de Shulman, le PCK est pour un professeur l'effet de son expérience professionnelle construite des domaines de réalité culturellement pertinents de la question qu'il enseigne. Un tel professeur a donc appris de son expérience et son PCK est alors qualifié de profond, ce qui s'exprime dans des manières de dire et des manières de voir les éléments de ces domaines de réalité. Il a donc la capacité d'imaginer des situations adéquates pour des objectifs didactiques donnés, parce que ces situations vont faire vivre ces manières de voir et de dire. De ce fait, un pedagogical content knowledge profond permet au professeur d'enseigner « en permettant aux élèves d'éprouver (ou, en leur montrant) la situation (ou, le sens) de la question que les élèves ont à traiter. »

Lorsque Assude *et al.* (2006) ont cherché à rendre compte de l'efficacité différentielle d'un professeur expérimenté, en Français et en Mathématiques, c'est cela qu'ils ont identifié. Mais de ce fait, l'action du professeur et des élèves est action conjointe (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000 ; Sensevy et Mercier, 2007) parce que les élèves participent activement à l'enseignement. Ils s'emparent eux aussi de la question dans ses dimensions anthropologiques, ce qui leur permet soit de développer des stratégies d'action qui donneront sens aux savoirs, soit d'y échouer. Ils peuvent parfois refuser de jouer ce jeu. Cela nous conduira, pour accéder à une description précise du curriculum mathématique, à montrer que certaines formes de l'action didactique des élèves et des professeurs dépendent des enjeux sociaux des enseignements.

Les connaissances didactiques des professeurs de mathématiques (CDP), en Chine aux États Unis et en France : le cas de la proportionnalité

Dans cette partie nous reprenons l'étude de An, Kulm et Wu (2004) dans le contexte français, de manière à introduire un élément tiers dans la comparaison qu'ils ont réalisée. Nous pensons en effet, contrairement à eux, que les phénomènes qu'ils ont observés n'appartiennent pas à la psychologie des professeurs – serait-elle une psychologie culturelle – mais bien plutôt à l'anthropologie c'est-à-dire aux propriétés des sociétés et à l'organisation de la transmission des savoirs qu'elles réalisent. Certes, comme l'affirment ces auteurs, des éléments dits « culturels » sont impliqués dans les « théories implicites relatives à l'apprentissage des mathématiques » qui organisent l'action des professeurs, mais d'autres facteurs interviennent. Ce sont, par exemple, « les explications mathématiques qui sont rendues disponibles aux professeurs comme moyens d'enseignement » qui sont des effets de ce que nous nommons en didactique des mathématiques francophone la transposition didactique (Chevallard, 1985a ; Mercier, 2008). Ce sont aussi les « théories implicites relatives à l'étude des mathématiques » de leurs élèves et des familles : ces facteurs-là ne relèvent pas de la cognition ou de la connaissance des mathématiques enseignées, mais de la pédagogie entendue comme pensée collective au sens de Durkheim (1922) ou, plus exactement, de Fleck (1935, traduction 1979).

En accord avec Stigler et Perry (1988), nous affirmons que : « *Cross-cultural comparison also leads reseachers and educators to a more explicit understanding of their own implicit theories about how children*[12] *learn mathematics. Without comparison, teachers tend not question their own traditional teaching pratices and are not aware of the better choices in constructing the teaching process.* » Nous interprétons cette déclaration comme affirmation relative aux différences interculturelles de l'enseignement, qui relève donc du parcours dans les mathématiques qui est proposé aux élèves par un plan d'études. Ce plan organise l'activité d'enseignement en permettant ou interdisant de fait (c'est-à-dire, implicitement) certaines explications ou démonstrations. et c'est justement ce qu'a montré Erdogan (2006, chap. 4). Le plus souvent, les décisions en cette matière n'appartiennent pas aux professeurs.

Présentation de notre enquête

Ainsi selon nous, le PCK constitue l'observable pertinent de l'efficacité des professeurs, bien qu'il ne soit pas déterminé principalement par les professeurs et leurs théories personnelles de l'apprentissage mais par les conditions sociales dans lesquelles ils enseignent. Nous remarquons que la définition originelle de Shulman ne comporte pas la connaissance du savoir des élèves. Celle-ci suppose en effet l'expérience du professeur et la stabilité des contenus d'enseignement, et c'est alors le Profound Pedagogical Content Knowledge, PPCK (Ma, 1999), qui se développe chez un professeur sur la base d'une première connaissance venue de sa formation, de son expérience des mathématiques enseignées et de son expérience des élèves et de leurs questions.

Nous reprenons donc par principe, dans l'enquête de An *et al.*, les éléments qui ne relèvent évidemment pas des savoirs culturellement présents, afin de mettre à leur épreuve les professeurs et les élèves. Nous centrerons notre enquête sur l'analyse du dernier problème du second questionnaire de An *et al.* (figure 1), qui semble très atypique en France. Nous aurons à comprendre pourquoi. En effet, les premiers professeurs enquêtés ont refusé de répondre, au prétexte qu'une telle question ne serait jamais posée aux élèves parce qu'elle serait déloyale (quel que soit le niveau d'études). La question était traduite en français de la manière la plus littérale, depuis la forme anglaise originale.

Figure 1 : la question originale

Problem 4 Your students are trying to solve the following proportion problem : The ratio of girls to boys on Math club is 3:5. If there are 40 students in the Math club, how many are boys?	a. Describe an activity that you would use to determine the types of solution strategies your students has used to solve the problem. Here are two students' solutions to the problem : June's solution : 3/5=x/40 There are 24 girls, so there 16 boys. Kathy's solution :3/8=x/40 There are 15 boys. b. What question would you ask Kathy to determine if she could justify her answer and reasoning? c. What suggestion would you provide to June that might help her correct her approach? d. What strategy would you use to encourage your students to reflect on their answers and solutions?

Nous avons insisté pour que cinq professeurs d'une équipe d'un institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) nous répondent par écrit, mais même ceux-ci se sont défaussés. Un entretien avec ces professeurs nous a alors conduit à repérer diverses difficultés. Nous avons donc retraduit ratio, par rapport plutôt que par proportion. Nous avons interverti l'ordre des questions pour permettre une entrée plus rapide des professeurs dans le questionnement : ainsi nous avons placé en premier l'aide à apporter à l'élève qui a produit une réponse erronée (c→a), la question a) devenant b), et seulement en fin, engagé les professeurs à construire une stratégie d'enseignement (d→c, b→d,). Enfin, nous avons modifié la question initiale (devenue b) pour demander la stratégie qui serait, selon les professeurs enquêtés, adaptée à une classe (bien évidemment non préparée à ce type de problème). Proportion prêtait à discussion : en effet, les professeurs débattaient alors du sens supposé de cette notion, pour les élèves, sans jamais arriver à une réponse stabilisée. Enfin, nous avons renoncé à demander aux professeurs une réponse écrite à loisir, pour organiser des entretiens semi directifs nous permettant de recentrer leur discours sur les questions posées.

En préservant autant que possible l'économie générale du problème, nos choix (figure 2) nous permettent de comparer les réponses obtenues à certaines des données présentes dans l'article de An *et al.*

Figure 2 : questionnaire posé en Guadeloupe

Problème 4 :
Vos élèves essayent de résoudre le problème de proportions suivant :
Dans le club de mathématiques le rapport (ratio) du nombre de garçons au nombre de filles est de 3 pour 5. S'il y a 40 élèves dans le club de mathématique, quel est le nombre de garçons ?
Voilà 2 solutions d'élèves au problème :
La solution de Julie : 3/5 =x/40. Il y a 24 filles, ainsi il y a 16 garçons.
La solution de Kathy : 3/8 =x/40. Il y a 15 garçons.
Quelles suggestions pourriez-vous fournir à Julie pour l'aider à trouver l'approche correcte ?
Les élèves d'une classe n'arrivent pas à commencer l'exercice. Que proposeriez-vous ?
Quelles stratégies pourriez-vous utiliser pour encourager vos élèves à réfléchir sur les réponses et leurs solutions ?

Quelle question poseriez-vous à Kathy pour déterminer si elle peut justifier sa réponse et son raisonnement ?

Pour comparer nos données avec celles de l'enquête en Chine et aux États-Unis, nous avons finalement interrogé 15 professeurs de collège (6^e à 9^e année), dans 7 établissements répartis dans 6 communes de Guadeloupe, constituant un échantillon des divers types de milieux (rural, urbain, périurbain) et des groupes sociaux rencontrés dans l'île[13]. Enfin, nous avons choisi d'effectuer notre enquête auprès de professeurs confirmés ayant plus de dix ans d'expérience, comme dans l'enquête initiale.

Présentation des résultats de l'enquête auprès des professeurs

Les professeurs guadeloupéens, plaçant cet exercice en quatrième (8^e année) ou cinquième (7^e année), mentionnent une difficulté relevant de ce qu'ils appellent le vocabulaire. Le mot rapport et le fait que ce rapport soit donné entre le nombre des éléments de deux parties (disjointes) d'un ensemble, leur posent problème. Ils préféreraient une question de proportion, présentant « une partie sur le tout ». Cependant le mot rapport n'est pas accueilli avec la même réserve par tous : « En classe de quatrième, on apprend une partie de la propriété de Thalès seulement dans le triangle, on n'a pas le coté papillon, les points sont toujours du même côté. On n'est pas censé leur dire que cela s'appelle la propriété de Thalès, on la nomme l'égalité des trois rapports, on retrouve exactement ce genre de chose : les rapports, utiliser les produits en croix » nous dit par exemple Louise. On peut comprendre ainsi une des conditions de vie de l'exercice : il faut que son lexique figure dans le corpus des termes que le professeur peut rappeler aux élèves, et que cela lui permette d'appeler une technique, que les élèves auront à mettre en œuvre. Cela semble bien désigner quelque chose de l'ordre du PCK, que le terme de rapport ouvre plus largement que celui de proportion. On peut donc penser, à ce stade de l'analyse, que le terme « rapport » possède un ambitus plus large dans l'institution des professeurs enquêtés : l'enseignement des mathématiques au collège, en France. Nous commencerons donc par exposer des éléments discursifs que nous avons sélectionnés dans les entretiens parce qu'ils représentent ce phénomène, en les rapportant à chaque question posée.

Aider Julie à se corriger

Certains professeurs reconnaissent là une tâche du type « produit en croix pour traiter une égalité de rapports », et peuvent donc imaginer comment aider Julie : « Lui demander de faire le lien entre 5 et 40, de voir que 5 c'est le nombre de garçons et que 40 c'est le nombre total d'élèves[14]… » Pour d'autres professeurs, l'intervention se centre sur le sens des deux rapports proposés par Julie : « Trois cinquième cela représente quoi ? Et x sur quarante cela représente quoi ? » La signification des quatre nombres de la proportion est également questionnée : « À quoi correspond le nombre 5 ? Voilà, pour la [Julie] mettre sur la voie. » Cela renvoie à des éléments de savoir supposés connus (An *et al.*, p. 156).

Enfin, certains imaginent un schéma, un tableau de proportionnalité ou un pourcentage : « Si elle n'arrive pas à fonctionner sur ces égalités, je serai tenté, pour l'aider, à la faire fonctionner avec des petits tableaux de proportionnalité pour essayer de se rapprocher ou avec de petits schémas comme le font les petits pour comprendre le lien entre sa proportion et ce qu'elle va chercher. » D'autres accompagnent Julie par des questions ciblées : « Si on a trois garçons pour cinq filles combien y a-t-il d'élèves en tout ? » Cela renvoie à des situations impliquant des connaissances mathématiques de niveau trophique plus faible, impliquées dans un modèle dit concret (An *et al.*, p. 156).

Deux des professeurs développent l'ensemble des éléments cités, comme des variations selon les réactions de leur public. Mais aucun d'eux n'évoque l'idée d'une estimation pour vérifier la solution ou guider la recherche, alors que cela est mis en avant par An *et al.* comme emblème du PCK attendu. Cependant, il faut noter que dans l'exercice étudié, l'estimation ne permet pas de rejeter la solution de Julie qui obtient 16 garçons, alors que la réponse exacte, bien proche, est 15. Une analyse mathématique montre qu'il faut agir sur les termes du rapport pour que le résultat de Julie soit franchement différent de la solution exacte. Par exemple, de manière un peu extrême, si nous modifions le rapport de 3 pour 5 en 1 garçon pour 4 filles, en conservant le total de 40 élèves, la résolution avancée par Julie se rejette facilement à l'aide d'estimations : si, dans l'égalité 1/4 = x/40 posée par Julie, la lettre x désigne le nombre de filles, on obtient 10 filles et 30 garçons, ce que Julie peut rejeter puisqu'elle s'attend à trouver beaucoup plus de filles que de garçons ; si x désigne le nombre de garçons, on trouve 10 garçons et 30 filles et la proportion ainsi obtenue se distingue nettement de la donnée « 1 garçon pour 4 filles ».

En France, dans le socle commun de connaissances et compétences, on demande aux élèves d'acquérir la compétence « Estimer l'ordre de grandeur d'un résultat » au palier deux du livret de compétences[15]. De manière plus précise, cette compétence est attendue en CM2 dans le domaine « Nombres et calcul ». Dans le domaine « Organisation et gestion de données », il s'agit de la compétence « Savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat ». La rubrique « Repères pour l'organisation des apprentissages » des programmes du CM1 mentionne déjà la compétence « Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat ». L'estimation est aussi une compétence évaluée dans le cadre des grandeurs. En revanche, les professeurs de collège ne sont pas explicitement appelés à revenir sur cette compétence et donc ne sont pas enclins à y faire appel dans les activités de résolution de problèmes.

Questions pour aider les élèves à démarrer

Notre enquête montre que les professeurs guadeloupéens expérimentés déclarent utiliser principalement ce qu'on appelle « le retour au concret ». Neuf des quinze professeurs en viennent à des dessins (bâtons et ronds représentant les garçons et filles de la classe, représentations de type ensembliste, parts et segments) et deux à des exemples (simplification des données). Mais tous posent des questions qui engagent les élèves à mobiliser une notion de proportion. Leur usage de la notion montre en fait que, dans l'institution considérée, le terme désigne une forme un peu générale de pourcentage : le rapport d'une partie à un tout. Trois professeurs en appellent au tableau de proportionnalité, alors mobilisé comme appui illustratif. Ainsi, pour guider les élèves, les professeurs guadeloupéens ont tendance, comme les professeurs américains, à utiliser une approche concrète ou illustrée avec des tableaux ou des diagrammes et des manipulations, tandis que les professeurs chinois tentent de revenir sur la proportion.

Questions pour encourager les élèves à réfléchir sur leurs réponses

Il ressort de notre enquête que la méthode déclarée unanimement par les professeurs guadeloupéens reste un jeu de questions. Certes, les professeurs efficaces « savent comment poser des questions pour dévoiler ce que les élèves savent et comment s'appuyer sur ce savoir déjà-là pour proposer des expériences et construire une séance fondée sur l'expérience des élèves. » (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 18, Traduction Silvy). Mais quelles sont les bonnes questions ? Peut-on les identifier *a priori* ? Que peut-on dire des questions d'aide proposées par les professeurs ? De manière insistante, l'ouvrage cité ci-dessus indique en effet que : « *Effective mathematics teaching requires a serious commitment to the development of students' understanding of mathematics. Because students learn by connecting new ideas to prior knowledge, teachers must understand what their students already know.* » Par ailleurs, trois des quinze professeurs guadeloupéens s'appuient sur le travail entre pairs « pour faire réfléchir les élèves sur leur réponse au problème ». Les questions que les professeurs poseraient ou celles qu'ils imagineraient vivre dans les interactions entre pairs ne nous sont pas apparues distinctes de celles qu'ils posaient aux élèves pour démarrer.

D'ailleurs, les réponses à la dernière question, relative à la capacité de Kathy à justifier sa réponse, ne nous ont pas apporté d'éléments clairement identifiables comme nouveaux. Poussés dans leurs retranchements, trois professeurs proposent des solutions pédagogiques (le débat entre pairs) et l'un s'engage dans une analogie (la situation de Thalès). Seuls les plus expérimentés, possédant une responsabilité institutionnelle dans la formation initiale ou continue de leurs pairs, envisagent de repenser l'énoncé. L'un propose de l'intégrer dans une classe de problèmes plus large, en affrontant l'élève à une réponse culturelle connue ; il repense la question en termes de « proportion dans un mélange » et il dispose donc d'une connaissance de la catégorie des problèmes dont la question relève. Un autre propose de viabiliser le problème en définissant des questions intermédiaires conduisant l'élève à déclarer explicitement sa stratégie, pour en interroger la dimension générique en conduisant l'élève à interroger la validité de sa technique.

Les éléments les plus pertinents de la comparaison sont résumés dans la figure 3.

Figure 3 : Les données de l'enquête, types de réponses

PCK (pedagogical content knowledge)	Composants essentiels	États Unis %	Chine %	Guadeloupe %
Promouvoir les idées des élèves à propos des tâches mathématiques	*Aider Julie à se corriger* Utiliser l'estimation	4	6	0
	Questions pour comprendre les stratégies de vos élèves Dessiner des images et des tableaux	14	15	13
	Encourager Kathy à réfléchir sur ses réponses pour progresser Utiliser des questions ou des tâches pour aider les progrès des élèves dans leurs idées Réponses inintelligibles [16]	57 43	100 0	100 (15 réponses)

L'ensemble de nos observations nous permet de comprendre le refus de la forme initiale du questionnaire. En effet, les professeurs ne disposent pour la plupart que d'un seul outil conceptuel pour étudier la question : la notion de proportion, et de deux techniques associées (tableau de proportionnalité, produit en croix). Or, cette notion est réduite dans son emploi au cas de la modélisation du rapport d'une part à un tout. Nous devons donc nous interroger sur deux questions : d'abord, sur le fait que les élèves seraient eux aussi fortement contraints par le rapport institutionnel à ces questions, tel que le programme d'enseignement le définit ; ensuite, sur le fait que ce rapport institutionnel est limité à un ensemble trop maigre de notions pour outiller efficacement des professeurs qui chercheraient à « aider les élèves à mobiliser leurs connaissances pour étudier un problème nouveau ». Si ni les professeurs ni les élèves guadeloupéens et français ne sont en mesure d'entrer en matière avec le problème posé et si même ils s'y refusent, c'est qu'ils ne disposent pas des outils de pensée nécessaires à cette tâche : nous aurons alors à démontrer ce fait.

Présentation des résultats de l'enquête auprès des élèves

Nous avons donc donné cet exercice dans une bonne classe de collège (classe de sixième), composée ce jour-là de 21 élèves. Les données numériques du problème 4, 5 et 40, nombres pas trop grands, permettent aux élèves de collège d'appréhender le problème. Deux tiers d'entre eux aboutissent à une réponse (exacte ou erronée). Six élèves obtiennent le même résultat que Julie, et huit élèves trouvent la réponse exacte. Ce résultat est remarquable, quand on sait que selon l'observatoire de l'enseignement des mathématiques (EVAPM) dans les années 1990, le taux de réussite en 6^e à un exercice de calcul de quatrième proportionnelle proposé par le moyen d'un tableau de proportionnalité était de l'ordre de 40 %, et qu'il était plus faible avec un produit en croix, objet d'enseignement à ce niveau. Ce résultat nous engage à penser que les élèves ont mobilisé des techniques très élémentaires, efficaces avec des nombres de taille raisonnable et des rapports simples.

Et en effet, les élèves qui répondent utilisent 3 procédés différents. Les professeurs n'en avaient anticipé que deux : l'un consistant à construire le tableau de proportionnalité avec trois colonnes, en utilisant soit l'opération multiplication soit l'addition, l'autre consistant en un raisonnement arithmétique ad hoc.

Voici les trois types de solutions élève :

a) 3+5 = 8 ; 8x5 = 40 ; (5+3)x5 = 40 ; 3x5 = 15

Cette manière de travailler est supportée par une technique de raisonnement qui n'a plus de nom aujourd'hui et n'est donc jamais écrite ni par un élève ni par un professeur. Cependant, nous pouvons la présenter, parce que nous l'avons entendue dans d'autres circonstances (il y faut un entretien individuel permettant le travail à voix haute). L'énoncé (qui n'est jamais observé complet) consiste en une partie de celui-ci : « Le nombre d'élèves de l'exemple est huit (trois garçons et cinq filles), il faut cinq fois plus d'élèves pour en avoir quarante. » On observe ici l'analyse du problème, qui permet d'en donner un modèle en deux formules (3+5 =8 ; 5×8 =40). La suite du discours semble venir d'elle-même : « Alors on peut écrire que (3+5)×5 =40 est le modèle de la situation, il se décompose en deux : 3×5 =15 et 5×5 =25 ; donnant ainsi le nombre des filles et des garçons de la classe. » On observe ici la synthèse, qui produit la réponse au problème, comme il se doit.

Les élèves mettent donc en œuvre une technique toujours pratiquée en arithmétique et en géométrie mais dont le nom et la description sont aujourd'hui ignorés des professeurs eux-mêmes : « le patron d'analyse-synthèse ». Les professeurs pensent et réalisent la mise en œuvre de cette technique comme un simple « raisonnement ad hoc » et ils en connaissent l'existence chez les meilleurs élèves, qui se montrent donc fins observateurs et bons autodidactes, pour avoir repris à leurs aînés cette pratique efficace. Comme ce faire n'a pas de nom, il se suffit à lu- même et sa dimension langagière est renvoyée au for intérieur de l'acteur : cela aussi, les bons élèves le savent.

b) Le tableau de proportionnalité à trois colonnes est l'objet d'enseignement pour le traitement des questions de proportionnalité en 6^e :

garçons	filles	élèves
3	5	8
x	y	40

Ce tableau permet, à qui analyse et modélise le problème en ces termes, de le résoudre sans autre forme de procès, par l'appel automatique à « un produit en croix » qui n'a pas même besoin d'être nommé : savoir c'est, ici, faire ; il n'y a rien à en dire puisque celui qui sait c'est celui qui fait. 8x =3×40 =120, donc x =120/8 =15, le nombre de garçons cherché vient tout seul comme solution d'une équation qui n'a pas même été posée.

On remarque combien cette manière de répondre se montre rapide et peu coûteuse, mais suppose d'abord, une expertise dans l'analyse que donne l'inscription des données de l'énoncé dans le tableau, et ensuite, une automatisation de la synthèse ; c'est que, de fait, le tableau cache les relations algébriques entre les données et ne se montre pas comme ce que nous appelons un modèle (une représentation calculable).

c) 3/5 = 6/10 = 9/15 = 12/20 = 15/25. Comme 15+25 =40, il y a 15 garçons et 25 filles.

Cette troisième manière de faire observer, oubliée par les professeurs, s'outille apparemment de la notion de fractions équivalentes. Considérée dans le cadre conceptuel correspondant elle mobilise aussi, mais de manière sans doute difficile à rendre explicite, la modélisation raisonnée par analyse/synthèse.

Des professeurs l'avaient imaginée sous la forme ci-dessous (figure 4), pensant à une mise en tableau possible, qui exprimerait « le rapport » évoqué et qui serait appuyée sur un raisonnement additif répété dont le tableau montre la réalisation.

Figure 4 : suites de nombres en correspondance

3	6	9	12	15	18
5	10	15	20	25	30
8	(16≠40)	(24≠40)	(32≠40)	40	(48≠40)

Mais la réponse est ici proposée par deux élèves dans une forme outillée de la notation des fractions, donc par un objet et un calcul de bien plus haut niveau trophique (au sens de Chevallard, 2007) que le tableau de correspondances. Au point que l'on pourrait presque argumenter la thèse que les élèves résolvent par approximations successives et systématiques un problème relevant du système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 3/5 = x/y \\ x + y = 40 \end{cases}$$

Commentaire

L'absence dans les anticipations des professeurs d'une technique fondée sur le patron analyse/synthèse comme le nomme Bolea, Bosch, et Gascón (1998), en Espagne, où il a encore droit de cité, peut s'expliquer par l'histoire de l'enseignement des mathématiques en France : la réforme des mathématiques modernes a relégué hors des programmes secondaires l'équivalence des fractions, tout comme l'arithmétique et la géométrie qui se travaillaient selon ce mode discursif. Mais les élèves sont passés outre et, ici encore, ils ont mis en œuvre une manière de faire qui mobilise des savoirs que l'enseignement ne met pas à leur disposition.

On remarque que la notion de rapport n'est pas mobilisée par les élèves, sans doute parce que sa forme mathématique calculable leur est inconnue. Cependant, ils réussissent à produire malgré tout le travail nécessaire. La notion de rapport appartient donc seulement au monde du professeur expérimenté : est-ce la trace d'une version antérieure du plan d'études, où la notion de rapport était encore vivante ? Ou est-ce le fait que les professeurs ne veulent plus imposer leur solution comme les textes institutionnels les y incitent ?

La première difficulté évoquée par tous les professeurs était « l'appropriation du vocabulaire ». Il est vrai que le mot « proportion » apparaissait ici hors de son contexte scolaire habituel en France. Nous avons donc posé cet exercice à des classes de niveaux différents au collège, au lycée, et à des étudiants préparant le CRPE[17], afin d'évaluer s'il existe un moment dans le cours d'études d'un professeur des écoles où la question serait abordée. Le pourcentage de réussite reste stable, voisin de 50 %. Nous avons tenté d'expliquer « le sens du mot proportion » en préalable, cela semble avoir peu d'influence sur les approches du problème : son traitement ne s'en trouve donc pas mieux enseigné ! Alors, y-a-t-il là un obstacle que les professeurs perçoivent sans pouvoir l'exprimer (René de Cotret, 2007) ?

D'après notre enquête, la principale erreur commise à tout niveau est proche de la confusion faite par Julie. Nous avons débattu de la difficulté à penser au calcul de la somme des deux coefficients du rapport, 3 et 5, qui doivent être considérés comme des mesures de grandeurs pour que leur somme donne un nombre de « garçons et filles » ou d'élèves. Car il est devenu évident pour nous que les professeurs n'ont pas de théorie de cette question dans leur trousse à outils didactiques : nous-mêmes la construisons au fur et à mesure de notre analyse.

Pour donner une présentation organisée des autres objets devant être mobilisés dans les divers traitements du problème, nous allons nous appuyer sur une technique d'analyse ascendante de la transposition (Mercier, 1997) reprise par Duchet et Erdogan (2005), et retravaillée par des auteurs de cet article (Silvy et Delcroix, 2009) sous le nom de « site mathématique local d'une question à l'étude ».

Construction du site local de la question (figure 5)

Ce problème se situe dans « le champ de la proportionnalité ».

- Il peut être résolu par le *dessin répété* de groupes de trois garçons (ou traits bleus) et cinq filles (ou traits roses), à concurrence d'un total de 40 élèves (ou traits bleus ou roses), sachant que le problème n'a de solution que s'il a été bien posé c'est-à-dire si le procédé aboutit à 40, ou tout multiple entier de (3+5).
- Cette manière additive peut être évoquée dans un raisonnement arithmétique contextualisé produisant une *progression* du type : « S'il y a trois garçons pour cinq filles cela fait huit élèves, le même rapport de proportionnalité donne aussi six garçons pour dix filles, neuf garçons pour quinze filles, douze garçons pour vingt filles, quinze garçons pour vingt-cinq filles, et comme cela fait juste quarante élèves c'est la réponse cherchée (s'il n'y en a qu'une). »
- La méthode décrite ci-dessus peut être appuyée sur la lecture d'*un tableau,* et devenir une technique multiplicative, système de notation qui évoque et formalise ce qu'on appelle un raisonnement de *proportionnalité* en présentant les couples « 3 :5, 6 :10, 9 :15 ».
- Une analyse du problème fondée sur la notion de proportionnalité peut aussi produire la relation clé, sur le modèle suivant : « *Analyse* : si il y a quarante élèves, ce nombre est la somme du nombre des garçons et de celui des filles, dont le rapport est 3 pour 5. Il y a donc autant de fois 3 garçons dans le groupe qu'il y a de fois 8 élèves dans 40. *Synthèse* : Comme 40 = 5×8, alors il y a cinq fois « huit » dans « quarante » et donc, cinq fois trois garçons dans le groupe d'élèves, soit : 15 garçons. » Ce type de travail arithmétique peut être appuyé sur une disposition en tableau des nombres manipulés.
- L'usage de la théorie des *rapports et proportions* conduirait à écrire x/3 =y/5 =(x+y)/8 =40/8 =5, ce qui donne presque immédiatement les réponses.
- Mais le travail de ce que Descartes appelait *l'analyse algébrique* donne directement un *modèle* du problème : si l'on nomme a et b les nombres respectifs de garçons et de filles, les informations dont nous disposons sont que *a :b : : 3 :5* (une proportion) qu'on lit « a est à b ce que trois est à cinq » et qu'on exprime algébriquement par *l'égalité des produits des termes extrêmes et moyens* : « 5a = 3b ». On sait aussi que la somme des nombres cherchés est 40 et on écrit : « a+b = 40 ». Comme on le sait (Gascón, 1993), l'algèbre dispense du mouvement analyse/synthèse en proposant un *calcul sur le modèle* du problème (5a =3b et a+b = 40). Il suffit de considérer ce modèle comme un système de deux *équations*, à résoudre.
- Si l'on regarde 5a =3b comme une *équation diophantienne,* le théorème d'Euclide garantit l'existence d'une solution puisque b est alors multiple de 5, b =5u et a est multiple de 3, a =3v ; alors 5a =15v =3b =15u, donc u =v. Donc a+b =5u+3u =8u, soit u =5 pour un total de 40.
- Et puis, il est aussi possible de travailler la question à l'aide de la notion de *coefficient de proportionnalité* c'est-à-dire, dans le cadre des *fonctions* linéaires : « 3 garçons pour 5 filles donne, dans un groupe qui est donc de 8 élèves, la *proportion* (constante par hypothèse) des garçons (3/8 = 0,375) et celle des filles (5/8 =0 ,625). Si g et f désignent les nombres d'élèves de chaque genre et n leur nombre total, un modèle de la population de garçons est g = 0,375n, et f = 0,625n, soit g = 0,375x40 = 15 » etc[18].

Le problème posé peut donc être résolu par des techniques arithmétiques élémentaires comme par des techniques algébriques ou fonctionnelles plus ou moins savantes, que le site permet de présenter. Les éléments cités y figurent en gras et la présentation montre que la question fait partie du champ plus vaste de la proportionnalité.

Figure 5 : Site local du problème

Partie anthropologique		Objets	Partie mathématique		
Substrat 2 : heuristiques	Substrat 1 : choses		Techniques	Concepts 1 : technologies	Concepts2 : théories
Logique du contrat didactique Méthodes : - ***Manipulation d'une représentation iconique*** - *Construction de progressions* - *Manipulation de rapports numériques* - ***Tableau de correspondances*** - *Patron d'analyse synthèse* - Mise en équation Utilisation d'une estimation Obstacle (frontière grandeurs et nombres)	***Dessin/ Schéma*** Fractions équivalentes *Progressions* *Rapports semblables* ***Nombres Partitions*** *Calcul sur les rapports* ***Pourcentage*** Ratio Formule	Entiers naturels ***Rapports de grandeurs*** Fractions ***Proportion (rapport d'une partie sur un tout)*** Quotient Opérateurs multiplicatifs Modèle	Rationnels ***Tableau de proportionnalité*** Calcul du coefficient de proportionnalité ***Passage d'un rapport à une proportion globale*** *Pourcentage* ***Calcul d'une quatrième proportionnelle*** Équation diophantienne Système de deux équations à deux inconnues	Théorème d'Euclide[19] Analyse algébrique *Rapports et proportions* *Formules et Équations* Rapport de similitude	Raisonnement arithmétique Modèle algébrique Équations dans un corps Système d'équations Algèbre linéaire

En gras, le site des réponses professeurs ; en italiques, le site des réponses élèves

Ce travail (figure 5), que nous appelons l'analyse du problème posé aux élèves, montre à quel point les réponses attendues par les professeurs relèvent du « schème de proportionnalité », une routine sans moyen de contrôle sémantique autre que le tableau. Pour s'engager dans cette résolution, il faut que l'élève capable d'anticiper quelque peu fasse totale confiance au professeur, qui « a bien choisi les nombres » et qu'il s'engage dans une résolution « sous contrat ».

Le site et la construction des connaissances partagées des professeurs

Le site local, donné sous forme d'un tableau structuré en réseaux, met en évidence l'organisation locale des savoirs et connaissances qui sont portés par l'énoncé, et permet d'organiser plusieurs manières d'étudier la question. La partie mathématique prend en charge les savoirs tandis que la partie anthropologique rend compte de notre exploration du domaine de réalité qui fait vivre le problème et vise à identifier notamment les préconstruits, les objets proto-mathématiques, les théories locales[20] que mobilise le travail dans ce domaine. Ces objets, théories locales et heuristiques appartiennent à ce qu'on pourrait appeler la culture ; c'est pour signifier qu'ils s'opposent aux objets théories et techniques mathématiques identifiées que nous les qualifions d'anthropologiques : ils relèvent en effet de la pensée « sauvage et universelle » ou si l'on préfère, de la connaissance et du traitement de problèmes en milieu naturel. L'enquête auprès des professeurs a montré que les professeurs français interrogés ne partageaient pas avec leurs élèves une telle pensée, un logos ayant des fonctions de théorie naïve qui leur permettrait d'enseigner sur la question.

Les mathématiques modernes bâties sur les mathématiques axiomatisées ont rendu inutilisable la théorie élémentaire locale construite au cours des siècles à partir de la théorie des proportions. Elle organisait le contenu d'enseignement et orientait les connaissances didactiques des professeurs. Les travaux de Chevallard (1985b, 1989, 1990) sur le lien entre l'algèbre et l'arithmétique montrent que le plan d'études d'avant la réforme était centré sur le passage d'un raisonnement arithmétique à un raisonnement algébrique. Au fil des réformes, l'enseignement de l'algèbre a perdu le lien à l'arithmétique et l'arithmétique même a disparu comme corps de techniques pour des classes de problèmes : c'est pourquoi le professeur n'imagine même plus aujourd'hui une méthode algébrique, et la disparition de la théorie des proportions nous semble être un des éléments explicatifs de la grande variabilité des réponses des professeurs enquêtés. Certaines se rattachent aux pourcentages, d'autres à un tableau de proportionnalité, et nous avons décrit comment un professeur faisait référence aux calculs de rapports utiles à l'usage du théorème de Thalès. Enfin, nous observons qu'aucun professeur n'évoque de réponse utilisant les fractions équivalentes, pourtant utilisée par un élève. En accord avec Shulman (1986, traduction 2007) dans le cas où les connaissances des élèves sont disqualifiées pour le travail demandé et produisent donc « des erreurs », nous dirons que « les professeurs ont besoin de la connaissance des stratégies les plus fructueuses pour réorganiser la compréhension des apprenants, parce que ces apprenants ne sont probablement pas à considérer comme des ardoises vides… ». La connaissance qui permet d'aider les élèves dans l'étude d'une question n'est donc pas disponible à la profession, chaque professeur développant ses habiletés personnelles sans lien avec les autres. Ainsi, dans les conditions actuelles, la multiplication des contre réformes déstabilise la formation d'un savoir permettant d'aider efficacement les élèves.

Un travail technique explicite, du type de celui que nous développons ici, permettrait peut-être d'identifier plus rapidement les domaines de réalité culturels fondateurs des pratiques initiales de l'étude qui manquent à la profession de professeur de mathématiques, de l'école élémentaire à l'université. Car, malgré la bonne volonté des professeurs et de leurs formateurs, ce manque transforme les injonctions d'enseigner « par enquête à partir d'activités initiales » ou « à partir de questions génératrices d'étude » en injonctions formelles, produisant une pédagogie inefficace et des professeurs empêchés, individuellement et comme collectif professionnel, de décider de ce qu'il leur est possible d'inventer (Mercier, Lemoyne et Rouchier, 2001), de le mettre à l'épreuve et d'apprendre leur métier par l'expérience. On comprend mieux, au terme du travail, pourquoi tant de professeurs français ont refusé tout net de traiter la question posée sur l'aide qu'ils pourraient fournir à des élèves rencontrant cet exercice, au motif qu'il est « hors programme ». Dans ces conditions, les élèves inventifs ne trouvent pas d'appui chez leurs professeurs, et ils risquent bien d'apprendre à ne pas proposer des réponses qui pourraient être qualifiées de non conformes. Ils auraient tenté d'agir dans un monde anomique, sans que la règle à laquelle se conformer soit connue.

Comment nous analysons le PCK comme une connaissance collective, socialement produite, quelques exemples

Cette connaissance collective appartient aux connaissances professionnelles des professeurs. Elles est formée de telle manière qu'ils peuvent la partager avec les élèves, comme mémoire collective de la classe. Notre méthode d'analyse s'appuiera encore sur la notion de site mathématique local d'une question. Nous observons les savoirs, qui sont pour nous des objets sociaux partagés. Ainsi quand nous disons que la connaissance est sociale et située, cela ne signifie pas qu'elle est distribuée entre plusieurs personnes, chacune se spécialisant, mais que l'on ne pense pas seul, parce que l'on partage les manières de dire et de faire qui montrent ce que l'on sait. La connaissance des mathématiques enseignées, par les professeurs en Chine, aux États-Unis ou en France constitue pour nous trois ensembles de savoirs professionnels, dont on peut observer l'inscription dans le curriculum de mathématiques de chacun de ces trois pays, puis dans l'expérience professionnelle de la profession de professeur. Ces savoirs de la profession n'appartiennent en propre à aucun professeur, mais avec Chevallard (1989), puis (Chevallard, 1997) nous savons dès avant les travaux de Ma, qui le montre comparativement entre États-Unis et Chine, que les savoirs d'un professionnel sont surdéterminés par leur nécessaire compatibilité avec le savoir collectif de sa profession. Les ouvrages pour l'enseignement peuvent donc témoigner de ce que sont les savoirs professionnels des professeurs, lorsque ces ouvrages s'adressent aux élèves pour organiser et accompagner l'étude des mathématiques : c'est par ce moyen que nous poursuivrons notre enquête. Cela nous ouvre la possibilité d'une comparaison dans le temps (avant et après la réforme moderniste, en France et en URSS) au lieu de la développer dans l'espace (aux États-Unis et en Chine).

Première observation : une introduction « classique » des fractions

Cette introduction peut être observée depuis Bézout en 1760 jusqu'en 1960, en France. Nous l'étudierons dans les « 160 leçons d'arithmétique » publiées par Lemoine en 1920 (7^{e} édition) chez Hachette, à l'intention des candidats au certificat d'études : ce fut un auteur de référence dans la dernière période. On y reprend de front l'étude des nombres entiers et décimaux et des fractions, qui a déjà été conduite dans les classes précédentes, au rythme de 4 leçons par semaine. Chacune tient sur une double page et elle est accompagnée d'exercices de calcul mental rapide, d'une série graduée d'exercices oraux, de problèmes oraux et écrits déclinant un modèle type, corrigé. La 9e leçon est intitulée Fractions, on peut lire en introduction :

> « Si je prends une unité quelconque, une pomme par exemple, et si je partage cette unité en cinq parties égales, j'obtiens des parties cinq fois plus petites que l'unité : ce sont des cinquièmes…/… Ces parties de l'unité sont des fractions…/… une fraction se compose de deux termes : le dénominateur indique en combien de parties égales l'unité a été divisée ; le numérateur indique combien on a pris de ces parties. »

unité décimale. La leçon 3 porte sur La numération des nombres entiers, sachant que :

> « La place d'un chiffre dans un nombre indique l'ordre d'unités qu'il représente…/… Ainsi 3 029 408 se lit trois millions vingt-neuf mille quatre cent huit unités, chaque tranche recevant le nom de la classe d'unités qu'elle représente. » (Nous soulignons)

La première leçon propose les notions préliminaires, qui sont celles de Compter et Mesurer, puis d'unité, de parties de l'unité, et de nombre ou collection d'unités. Ainsi « le nombre entier est le nombre qui n'exprime que des unités entières : sept litres, onze pommes. » On peut observer comment les nombres y sont « concrets » c'est-à-dire que les noms de nombre sont toujours des adjectifs qualifiant une grandeur.

On construit alors le site local des fractions ordinaires pour l'ouvrage de Lemoine (figure 6).

Figure 6 : site local des fractions ordinaires

Partie anthropologique		Objets	Partie mathématique		
Substrat 2 : heuristiques	Substrat 1 : choses		Techniques	Concepts 1 : Technologies	Concepts2 : Théories
Fractions parlées et usages **Fractions écrites** **Compter** **Mesurer** **Théorie naïve des nombres** (obstacle de l'infini)	**Nombres** **Grandeur** **Mesure** **Unités** **Entiers** **Numération décimale** **Dénomination des grands nombres** **Fractions décimales** Décimaux	Partage, parts **Dénominateur** **Numérateur** **Fractions ordinaires** **Nombres fractionnaires** Nombres « complexes » (durées)	Changements d'unités **Simplification et réduction** **Opérations sur les fractions** Opérations sur les nombres « complexes »	Codes décimaux Écriture polynomiale des nombres Diviseurs et multiples Système de base d'une numération Symétrisation d'un semi-groupe	Espace vectoriel Anneau des décimaux Suites et séries numériques Corps des fractions Algèbre des grandeurs

En gras, la partie identifiée dans les leçons 1 à 9 de l'ouvrage de A. Lemoine

Et pour mieux comprendre l'enjeu d'enseignement voici l'Exercice oral 111 : « Quelles unités de fraction obtient-on en partageant l'unité en 3 parties égales ? etc. » et le 112 : « Que sont les quinzièmes par rapport aux cinquièmes ? etc. » Le dénominateur est donc l'indication d'une sous-unité. Une enquête rapide dans les leçons précédentes le confirme : La 5e leçon définit La numération des nombres décimaux : « Les unités décimales sont les parties de l'unité divisée en dix, cent, mille » etc. ; puis, les nombres décimaux : l'exemple est 5 unités, 25 dix-millièmes, nombre où « on énonce la partie entière, puis la partie décimale comme s'il s'agissait d'un nombre entier », en donnant au dernier chiffre le nom de l'unité décimale qu'il représente. Ainsi, « dix-millièmes » est dans ces expressions le nom d'une

Les objets sont manipulés dans les tâches scolaires présentées aux élèves et sont annoncés dans les titres et sous-titres ; la définition des techniques indique aussi les types de tâches spécifiés dans l'enseignement et en particulier dans les exercices ; nous avons qualifié de technologies (concepts 1) les objets du premier niveau de concepts, parce qu'ils peuvent être repérés à l'oeuvre dans les discours associés à l'exécution technique, et de théories ou concepts 2 les éléments de plus haut niveau mathématique en raison de leur généricité et de l'ampleur des types de tâches qu'ils permettent de considérer. Duchet et Erdogan (2005) proposaient trois niveaux de concepts afin de montrer l'épaisseur de l'objet qu'ils étudiaient, mais comme on le voit cette épaisseur est hors d'atteinte à un niveau donné et nous n'avons pas cherché à faire la même démonstration que ces auteurs. Nous étudions une autre dimension du site que, dans l'espace de la feuille de papier, nous n'avons pu situer autrement qu'à l'opposé de la première, produisant un effet de sens que nous n'avons pas pu éviter. Les choses du substrat sont parfois présentes dans les chapitres antérieurs, sans pour autant avoir été construites comme des objets mathématiques, les heuristiques sont mobilisées comme allant de soi et ne sont donc, en général, pas nommées ; pour autant, elles ne peuvent être considérées comme des « prérequis », n'ayant en général jamais été enseignées ni requises.

On remarque alors que certaines des choses pourraient être des concepts, à un autre niveau de mathématisation et, dans un diagramme qui rend visible des objets en deçà et au-delà de la visée institutionnelle, des objets comme « les décimaux » sont alors repérés deux fois. On évoque dans le site beaucoup d'objets, utiles en principe, sans que l'on puisse témoigner de leur présence vivante au niveau d'études considéré : ils ne sont, ici, pas pris en charge dans le discours ni bien sûr sensibles (c'est-à-dire qu'aucun apprentissage à leur endroit ne sera évalué). Mais leur présence dans le site montre que certains des objets du substrat de la question étudiée ne sauraient acquérir de statut mathématique dans le cadre du plan d'études (du curriculum) considéré, et que certains objets mathématiques pourtant utiles à la saisie des problèmes posés par les usages techniques attendus des élèves appartiennent à des niveaux de théorie qui demeurent hors d'atteinte des élèves et souvent même du professeur.

L'ouvrage que nous étudions fait vivre, dans ses dix premières leçons, une partie seulement du site, marquée ici en caractères gras. Par notre enquête, nous montrons que les noms des classes (mille, dans vingt-cinq mille) sont traités comme des noms de grandeurs, et que, pour les fractions, les dénominateurs sont traités comme des noms de classes. C'est bien sûr dans cette logique que juste avant l'introduction des fractions ordinaires, la 8e leçon porte sur le système métrique, les multiples et sous-multiples : de fait, l'idée des sur-unités et sous-unités est sous-jacente à toute la progression de l'ouvrage. C'est sans doute aussi pour cela que les fractions ne sont pas utilisées comme des adjectifs qualifiant une grandeur : elles sont « fractions de l'unité » et seul le numérateur y qualifie la quantité tandis que le dénominateur y nomme la sous-unité.

Au-delà de l'horizon bien sûr, il y a dans le site les théories de la mesure des grandeurs et en deçà, au deuxième niveau de substrat, il y a les pratiques physiques de mesurage et les rapports entre objets géométriques et systèmes de nombres. Mais il faut, pour apercevoir dans le site ces objets pourtant pertinents, prendre de la hauteur : ces dimensions mathématiques et anthropologiques sont au-delà des horizons institutionnels scolaires. Nous avons dû les reconstruire au terme d'une enquête sur l'organisation du plan d'études autour des fractions ordinaires, dans cet ouvrage. Nous avons ainsi retrouvé certains résultats du travail doctoral de Chambris (2010), qui nous étaient inconnus, et l'analyse d'un phénomène transpositif qui date au moins de Mounier (2010).

Si l'on étudie le discours tenu par Lemoine comme l'expression d'un PCK officiel, alors il faut considérer que l'idée d'unité de grandeur est la clé du discours tenu dans chacune des dix leçons présentées ici. Ainsi, nous sommes conduits à considérer que la compréhension profonde proposée pour cet enseignement est celle-ci : les nombres qualifient des unités, la règle s'applique à des sur-unités ou des sous-unités, qui peuvent être décimales ou fractionnaires. C'est ainsi que « la grandeur qu'ils expriment peut toujours, si l'on choisit une unité convenable, être mesurée par un nombre entier » comme l'affirment aussi Marijon (Inspecteur général de l'Instruction Publique) et Péquignot (directeur de l'école primaire supérieure de Toulouse) en 1934, à la page 142 de leur « Arithmétique du brevet élémentaire » (6e édition conforme aux programmes de 1922, Paris : Hatier). Cette affirmation nomme la stratégie didactique de Lemoine. Elle n'est exacte qu'en pratique, comme le remarquait déjà Girard traduisant Stevin (1634) dans le premier exposé en français de la numération décimale, mais elle sert de théorie des nombres et dans cette fonction, elle est d'une efficacité remarquable. Durant deux siècles elle permet en effet de développer des pratiques numériques complexes, dans un curriculum sur plus de dix ans d'études.

Il est donc temps de conduire une enquête un peu plus fouillée dans les enseignements de plus haut niveau, pour comprendre l'organisation du curriculum, au début du siècle dernier : « Qu'en est-il dans l'enseignement secondaire des lycées ou même dans l'enseignement supérieur ? » L'idée que tout nombre est entier pour une unité bien choisie semble être la clé des théories à usage d'enseignement disponibles dans la profession de professeur de l'enseignement élémentaire, jusqu'au niveau des professeurs d'école normale. Cela conduit à une question : En France, durant plus d'un siècle, les pratiques du système métrique ont-elles fondé le discours sur les nombres rationnels ? Autrement dit, la description des pratiques du système métrique a-t-elle servi de logos pour des pratiques mathématiques ?

Deuxième observation : les Éléments d'Arithmétique de Briot

Traditionnellement, le cours écrit du professeur constitue le texte du savoir de la classe. Au XIX^e^ siècle ou au début du XX^e^, ce cours est rédigé comme un texte par un auteur, qui peut être un collectif d'élèves[21]. Il n'est pas seulement composé d'une suite de théorèmes et de leur démonstration, mais comporte de nombreux commentaires : c'est aussi un discours. Nous analyserons ici les premières pages de la 9e édition, chez Delagrave en 1873, d'un manuel imprimé de C. Briot, professeur à la faculté des sciences et maître de conférences à l'ENS. Ces Éléments d'Arithmétique sont destinés aux classes de l'enseignement scientifique des lycées. La qualité professionnelle de l'auteur et les rééditions de l'ouvrage nous permettent de soutenir que ce cours fait référence, dans l'enseignement secondaire spécialisé cette fois.

La structure est solide et comme le titre, rappelle Euclide : six « livres » pour 217 pages, chaque livre découpé en chapitres (cinq chapitres pour le livre premier : les quatre opérations), chaque chapitre est divisé en paragraphes numérotés (pour le premier : neuf paragraphes). Le souffle du discours arithmétique ne s'y appuie sur aucun symbole algébrique, et les caractères italiques sont utilisés pour accentuer certaines parties du discours. Nous le suivrons selon le même principe que l'ouvrage précédent, depuis les fractions (livre III) vers les fondements du livre I, sur la numération. Le chapitre sur « les fractions ordinaires » commence en effet par la mesure des grandeurs et (§85, p. 82) la distinction entre grandeurs qui sont des collections d'unités et grandeurs continues, « qui ne renferment pas en elles l'idée de nombre ; cependant, il est possible de les représenter par des nombres… » Ainsi (§86, p. 83) :

> « On appelle unité la grandeur prise pour servir de terme de comparaison à toutes les grandeurs de même espèce. Mesurer une grandeur c'est la comparer à son unité ; c'est chercher combien d'unités et de parties d'unités elle renferme…/… Lorsque la grandeur à mesurer est plus petite que l'unité, on partage cette dernière en parties égales… on dira par exemple qu'elle est les 7 douzièmes de l'unité ou qu'elle est exprimée par la fraction SEPT douzièmes… par extension on appelle nombre, en général, la mesure d'une grandeur au moyen de l'unité… des grandeurs, quant elles sont ainsi mesurées ou représentées par des nombres, portent le nom de quantités. »

Nous sommes interrogés par l'indication graphique qui conduit l'auteur à écrire les fractions en notant le numérateur en majuscules et le dénominateur en italiques. Et en effet, nous trouvons une règle semblable à la page 2 de l'ouvrage, le premier exemple de numération étant SIX dizaines et QUATRE unités, un nombre qui s'énonce SOIXANTE-QUATRE (§7, p. 6). L'auteur indique en conclusion de ces explications : « … en un mot, le rang de chaque chiffre, à partir de la droite, indique l'ordre des unités qu'il représente. Il est donc inutile d'écrire le nom de l'ordre, le rang du chiffre l'indique suffisamment. » Pour les grands nombres, une sorte de translation de la règle conduit à énoncer 1 070 000 304 en classes UN billion SOIXANTE-DIX millions TROIS CENT QUATRE unités. Et pour les fractions ordinaires, on trouve ainsi (§99, p. 94) :

> « les définitions données pour l'addition et la soustraction des nombres entiers s'appliquent aux quantités en général. L'addition a pour but de réunir en une seule plusieurs quantités de même espèce…/… Lorsque les fractions données ont même dénominateur, on a des parties égales à additionner ; pour trouver combien de parties renferme la somme, il suffit évidemment d'additionner les numérateurs… Soit à ajouter 3/12 à 4/12 ; si on ajoute 3 douzièmes à 4 douzièmes on a 7 douzièmes, c'est-à-dire la fraction 7/12. »

De fait, le site local des fractions ordinaires est ici tout à fait semblable à celui que nous avons construit précédemment, mais l'appel au système métrique et à la notion d'unité n'est plus présent que dans les « explications » liminaires et n'a plus la fonction de justification des techniques. C'est justement la question que pose (Chambris, 2010) dans le cadre de la TAD en montrant que dans l'enseignement primaire, aujourd'hui, l'étude du système métrique manque. Nous rejoignons ainsi ses conclusions, sachant que : 1) le rapport de modèle à système peut jouer dans les deux sens c'est-à-dire qu'un discours sur les choses peut servir de modèle à un des modèles de ces choses (réel et modèle sont des fonctions relatives à un usage), et que : 2) toute théorie est, d'une certaine manière, métaphorique (une métaphore filée remplit une fonction théorique parce qu'elle donne à penser et peut contrôler des usages techniques.) Charbonnel (1991) montre qu'une métaphore est une théorie ad hoc et même si elle n'est propre que très ponctuellement, parce que le plus souvent elle ne résiste pas à l'interrogation sur sa consistance, elle permet de porter un jugement, ce qui est l'étymologie et une des fonctions de savoir (du latin sapere, avoir du goût puis, du jugement).

Pour conclure sur cette enquête rapide, nous disons que l'unité discursive des ouvrages que nous étudions fait, du discours tenu qui travaille la numération comme les fractions en s'appuyant sur les praxèmes (Matheron, 2009) mis en place à propos du système métrique, un logos permettant de rendre compte des techniques du travail mathématique, dans les cours élémentaires de mathématiques. Ainsi, dans la transposition classique en France, la compréhension profonde de la numération décimale de position tenait à son lien fonctionnel avec le système métrique décimal, qui constituait manifestement le domaine de réalité culturelle[22] de cette question, importée dans l'espace de la classe de mathématiques par le discours du professeur. Cela supposait bien sûr que le professeur discoure et « fasse cours » : la forme sociale de relation pédagogique déterminait la possibilité de ces choix didactiques.

La réforme moderniste de l'enseignement des mathématiques a fait voler en éclats ce genre d'arrangements. Les mathématiques savantes sont devenues à cette occasion la seule justification acceptable des techniques enseignées, et la théorie naïve des ensembles a joué le rôle des pratiques sociales du mesurage, pour porter le logos nécessaire et former le PCK de la profession d'enseignant de mathématiques. La société n'a pas supporté cette rupture mais le rejet de la réforme n'a pas conduit à un retour au statu quo ante. De plus, le cours magistral n'est plus accepté, et les leçons ne construisent plus un texte du savoir, ni réel ni même évoqué. Nous pensons que c'est pourquoi, aujourd'hui, les pratiques d'enseignement sont muettes et la formation par l'expérience d'un PCK des professeurs n'est plus soutenue par une forme instituée dans les ouvrages d'enseignement comme l'était la forme classique. L'analyse de cette situation nouvelle et la recherche de solutions réalistes suppose des outils d'enquête nouveaux, que nous avons construits autour de l'idée de site local d'une question.

Troisième observation : le cours de mathématiques supérieures de V. Smirnov

On pourrait encore penser que les caractéristiques relevées sur les analyses de manuels précédentes ne concernent que des ouvrages destinés aux niveaux scolaires premiers, de l'école élémentaire au lycée. Au fond, le discours des auteurs – que nous avons pu qualifier de théorie naïve – serait justifié par les publics auxquels s'adressent les ouvrages, puisqu'on ne dispose pas aux différents niveaux scolaires de la théorie mathématique des objets considérés.

Mais il n'en est rien, du moins il n'en a pas été toujours ainsi, ni partout ainsi. Une analyse des premières pages du cours de mathématiques supérieures de V. Smirnov (éditions MIR, Moscou, 1970) est éclairante. Le choix de cet ouvrage se justifie par son usage fréquent chez les étudiants de mathématiques francophones dans les années 1970. Nous basons l'analyse sur le tome 2, chapitre premier, consacré aux équations différentielles ordinaires. En premier lieu, le texte prend très largement le pas sur les parties mathématiques, ce qui, -au demeurant- est fréquent sur les ouvrages contemporains comme le Pisot et Zamansky (1972). En revanche, on chercherait en vain, dans l'ouvrage de Smirnov, la structure classique d'un cours de mathématiques spéciales de l'époque, structure qu'on peut résumer en : introduction (la position du problème chère aux ouvrages de Ramis, Deschamps et Odoux (1979), les définitions, les propriétés (propositions, théorèmes), les exemples, les exercices. (L'ordre de ces éléments peut varier.) Chez Smirnov, aucune définition n'est mise en valeur autrement que par l'usage de caractères italiques dans le corps du texte, signalant les termes définis. Les théorèmes ne sont pas l'élément principal autour duquel s'organise le cours : on attend la page 17 pour trouver un énoncé identifié comme tel (le théorème A[23]), qui est une forme du théorème de

Cauchy-Lipschitz d'existence et d'unicité de la solution (préférablement appelée courbe intégrale) pour une condition initiale donnée. On cherche presqu'en vain d'autres théorèmes sur les 185 pages consacrées aux équations différentielles.

La démonstration de ce théorème A se trouve d'ailleurs (assez logiquement) rejetée au moment où est abordée la méthode de Picard des approximations successives, quasiment à la fin du chapitre. C'est que la démonstration n'est pas considérée comme l'élément premier (au moins dans l'ordre d'exposition) pour comprendre le sens du théorème de Cauchy-Lipschitz[24]. Il faut donc poursuivre l'enquête au-delà de l'organisation matérielle. Nous suivons un élément, clairement le plus important par la place qu'il occupe dans les pages concernées, celui de l'interprétation géométrique du couple « équation différentielle, courbe intégrale ». Tout d'abord, pour l'équation différentielle d'ordre 1, l'auteur donne l'interprétation classique du champ de directions : « c'est-à-dire qu'en chaque point l'équation (2) définit une certaine direction » (p. 16). L'auteur en tire des conséquences intuitives sur l'unicité de la solution passant par un point donné ce qui sert de justification provisoire pour le théorème A[25]. Pour justifier l'approximation de la solution par une ligne brisée (il s'agit en fait quasiment de la méthode d'Euler), il n'hésite pas à employer le terme petit pour qualifier le découpage en carrés d'un domaine B limitant l'intervalle auquel appartient la variable (le temps, si l'on veut) et les valeurs prises par la courbe intégrale. Au passage, ce terme petit est employé sans précaution particulière d'usage (par exemple sans guillemet). On peut y voir l'effet d'une école mathématique russe beaucoup moins sourcilleuse que celle française à l'égard du maniement des infinitésimaux : le « paradis » de Cauchy (la notion de limite) y est moins prégnant. Mais on peut aussi y voir une rédaction faite à un niveau de mathématisation suffisant pour le récit : « cette construction rend très vraisemblable le fait que par tout point M0 de B il passe une courbe intégrale et une seule ». Mais, en même temps, l'auteur ne trompe pas le lecteur puisqu'il indique qu'il y aura besoin d'une hypothèse supplémentaire sur la fonction pour rendre vrai le théorème A.

C'est pour l'équation différentielle d'ordre 2 qu'un calcul plus original est conduit. Il vise à montrer que, tout comme l'équation différentielle d'ordre 1 se rapporte à la notion géométrique de tangente, l'équation d'ordre 2, se rapporte à un objet géométrique supplémentaire, la courbure : « l'équation différentielle du second ordre donne la grandeur du rayon de courbure si l'on donne la position du point et la direction de la tangente en ce point » (p. 57). On passe de l'approximation par une ligne brisée à celle par de petits arcs de cercle. Ainsi, les lecteurs disposent-ils des éléments pour relier la théorie des équations différentielles (ou bien, si l'on veut, la partie vive du site mathématique de cette théorie) à d'autres éléments de la culture mathématique, comme, ici, par exemple l'approximation d'une fonction par son développement limité : le développement d'ordre 1, pour l'équation différentielle d'ordre 1, ou celui d'ordre 2, comportant le terme quadratique, pour celle d'ordre 2. Les prémisses de la géométrie différentielle, disons de l'étude des courbes sont présents.

Bien sûr, le discours est ici indiscutablement plus mathématique que dans les exemples précédents au sens où le contenu mathématique pourrait– si on le souhaitait – être réécrit avec le niveau de rigueur usuellement prescrit et présent dans les manuels, de type de classes préparatoires aux grandes écoles, comme celui contemporain de Pisot et Zamansky déjà cité. Mais ce discours s'en distingue nettement par un appel à ce que nous avons appelé les « choses » dans l'introduction, et parmi lesquelles nous classons ici la richesse des interprétations géométriques, comme le rattachement des équations différentielles d'ordre 2 à un objet géométrique (la courbure[26]). La formalisation mathématique d'une telle interprétation reste sans doute un exercice mathématique souhaitable pour en éprouver la robustesse. Mais les précautions de rédaction qui seraient exigées par un discours mathématique conforme aux coutumes de la profession ruineraient la (relative) simplicité de la présentation qui en est faite ici. Cela la rendrait impropre à son objectif : fournir au lecteur – peut-être un futur enseignant de mathématiques – le substrat de la notion de courbe intégrale d'une équation différentielle. En ce sens, nous affirmons que se joue ici quelque chose d'assez voisin que ce que nous avons noté dans l'ouvrage de Briot : la présentation, dans le fil du récit, d'une théorie des équations différentielles qu'on ne qualifiera pas de naïve, mais possédant un degré de rationalité choisi par l'auteur comme le plus propice à transmettre une compréhension profonde de la notion de solution. Peut-être est-ce de là que vient d'ailleurs le qualificatif de clarté souvent évoqué pour la série des ouvrages de Smirnov et conforme aux souvenirs de deux des auteurs de ce texte.

CONCLUSION

Nous avons tissé des liens entre des questions et des objets anciennement identifiés ou explorés : le PCK d'un côté, les objets proto-mathématiques et les organisations mathématiques de l'autre, puis enfin les situations fondamentales pour un savoir. Nous avons gagné avec le site local un outil d'analyse *a priori* ascendante de ce qu'est le savoir utile pour aider des élèves à étudier les réponses à une question, ou à les accompagner dans l'invention d'une manière de répondre. Nous pouvons nous appuyer sur les résultats de Shulman (1986) lorsqu'il montre que ce savoir se construit par l'expérience collective des professeurs, quand ils cherchent à aider les élèves dans leur activité propre, l'étude : car nous pouvons non seulement rendre compte des pratiques déclarées par les acteurs, professeurs ou élèves, mais nous rendons compte de celles que nous observons ici et maintenant, et nous imaginons celles que nous aurions pu observer ailleurs ou en d'autres temps. En ce sens, nous avons dorénavant la possibilité de comparer les connaissances de tel professeur aux connaissances disponibles dans le système d'enseignement, et à celles qui seraient nécessaires en principe, pour aider les élèves. Le site permet de l'envisager, en identifiant les situations qui pourrai(en)t faire référence pour eux, et leur donner accès à un espace discursif associé.

Nous avons montré comment ces situations sont nécessairement porteuses d'un logos efficace pour penser la question mathématique qu'elles posent. Shulman (1986, traduction 2007) affirmait que « penser adéquatement la connaissance du contenu requiert d'aller au-delà de la connaissance des faits ou des concepts d'un domaine. » Nous le comprenons en disant que l'action didactique du professeur expérimenté n'est pas déterminée seulement par les mathématiques employées dans le cours de l'action mais est définie par les questions qui émergent de l'activité des élèves et les réponses que leur fournit le professeur, que ce soit dans un enseignement par ostension directe suivie du travail des problèmes type correspondants aux outils présentés, ou par l'intermédiaire d'une situation où leur action propre fait sens et les conduit à rencontrer la question dont l'étude leur est proposée. Nous intégrons alors l'idée de PCK dans le cadre de notre théorie de l'Action Conjointe en didactique (Sensevy et Mercier, 2007), où la notion de situation est développée en référence à son emploi chez Brousseau (1998) et, de manière plus lointaine, chez Dewey, qui est aussi référence centrale de Shulman.

Le travail présenté ici avait été annoncé (Mercier, 2008) en demandant « une lecture anthropologique du programme didactique ». Il va en effet contre certaines dérives des études didactiques qui développent une analyse épistémologique isolée de ses conditions institutionnelles d'existence (son écologie). On ne peut se contenter d'identifier des organisations mathématiques d'un côté, et de leur associer l'analyse des rapports aux objets que ces organisations demandent de l'autre. Le travail d'enquête sur une question se conduit dans une institution et donc, dans la langue de la situation de référence, qui n'est identifiée d'aucun de ces deux points de vue. Nous avons donc qualifié la situation de référence d'anthropologique, bien que parfois son universalité soit moindre : si la question posée appartient bien à toute culture, la situation par laquelle elle se présente aux élèves appartient seulement à la culture commune de la société qui a décidé de leur instruction sur ce point, et il est possible même qu'une situation de référence n'ait de sens que dans le cadre de la culture scolaire. La notion de situation est pour nous le moyen de penser quel est le type (culturel ou anthropologique) de tâches désigné par une tâche scolaire, parce que le professeur doit l'identifier pour mettre en place les manières de dire pertinentes aux manières de faire qu'il veut enseigner : ce que le site de la question (qui n'est donc plus seulement mathématique mais qu'il faudrait qualifier de culturel ou anthropologique) aide le professeur à réaliser.

Alors, sans entrer ici dans un débat sur l'efficacité de l'enseignement qui demanderait à être instruit plus précisément dans une enquête comparative qui ne porterait pas seulement sur les mathématiques, rappelons que Ma (1999) montre qu'une différence essentielle entre professeurs chinois et occidentaux tient à l'organisation et à la profondeur culturelle de leur connaissance des savoirs enseignés. Ces connaissances fonctionnent comme des théories, que nous avons appelé locales ou naïves, et elles ont un rôle central dans la construction du PCK des enseignants. En mathématiques, lors de la réforme des mathématiques modernes, elles ont été remplacées par la théorie des ensembles qui a depuis été éradiquée, mais aucune construction efficace n'a pu renaître sur ces cendres. Il s'ensuit une prévalence des techniques – que les enseignants maîtrisent et enseignent – sur le logos, puisque l'enseignant ne peut s'appuyer sur une théorie guidant l'action. D'où, comme dans l'enquête auprès des enseignants de Guadeloupe, l'impression qu'un paysage incomplet est perçu par l'enseignant, alors qu'un élève peut proposer une solution inventive, inattendue !

C'est là où nous inscrivons la démarche de construction de sites locaux par les enseignants, soit dans le cadre de leur formation, soit dans celui de la préparation d'une activité de classe. Nous voyons alors le site comme une proposition faite à la collectivité permettant de reconstruire la connaissance profonde des objets d'enseignement, par le réseau que l'on tisse ainsi entre ce que Brousseau nomme la situation et que nous avons appelé sa composante anthropologique – ce qui permet à la question de faire sens, selon Shulman – et sa composante épistémique (mathématique), celle que décrit l'organisation disciplinaire de la question, selon Chevallard. Cette méthode de préparation à l'enseignement est utilisée par Sensevy (2011 chap. D9, pour le cas d'une fable de La Fontaine) ou Schubauer-Leoni Leutenegger et Forget (2007), pour des questions moins fermement organisées en discipline d'enseignement, par les chercheurs travaillant dans le cadre de la théorie de l'action didactique conjointe, et ses résultats sont à l'étude.

NOTES

1. Nous les appellerons ainsi tant que nous n'en aurons pas une meilleure description et que nous n'aurons pas trouvé leur place dans les théories didactiques existantes ; sans doute, le milieu au sens de la TSD (Théorie des Situations Didactiques) ou à celui de la TAD (Théorie Anthropologique du Didactique) et le domaine d'expérience au sens de Boero *et al.* (1995) désignent-ils certaines formes d'organisation de ces « choses ». Nous y reviendrons.
2. Au commencement, en première année primaire, le terme de « nombre » est un préconstruit : personne n'en demande une définition, le professeur dit simplement : « Ceci (27) est un nombre, cela (le 2 dans 27) n'en est pas un. » Les objets du quotidien sont préconstruits : « Ceci est une table, cela est un bureau. », et ne sont jamais définis.
3. Les objets proto-mathématiques servent à faire des mathématiques mais ne sont pas considérés (pas encore ?) comme des objets mathématiques. C'est par exemple le cas des parenthèses, dans tout le cursus algébrique élémentaire et secondaire, de l'implication, ou de la notion de droite qui n'est longtemps que « le trait très fin que l'on trace à la règle » avant de devenir « le tracé droit entre deux points », ce qui ne la définit guère mieux mais suffit à entrer en géométrie en affirmant que ce chemin là est le plus court.
4. Au sens de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) proposée par Chevallard (1999).
5. On remarquera que c'est un domaine « artificiel scolaire » et non pas un domaine de pratiques sociales, comme dans les travaux initiés par Boero *et al.*(1995), qui l'appelle domaine d'expérience. Ce domaine est le milieu de la situation, dans la modélisation de Brousseau (1998).
6. Une situation fondamentale, au sens de Brousseau (1998).
7. Notre posture est anthropologique et nous appelons donc théories ce que des psychologues appelleraient schèmes, en attribuant leurs propriétés à l'appareil cognitif personnel qu'ils étudient tandis que nous attribuons ces propriétés aux techniques culturelles d'un groupe d'animaux sociaux. Elles sont pour nous effet du développement de pratiques et d'objets culturels dans ce groupe restreint qu'est une classe ou plus large, les classes de deuxième année de l'enseignement élémentaire.
8. En France, cette description procédurale de la technique de calcul de la soustraction est introduite dans l'ouvrage de Bézout (1765) à l'usage des écoles militaires.
9. Elle porte en effet uniquement sur « le calcul de 2-9 » que l'emprunt permet de remplacer par 12-9, alors qu'il faut poursuivre l'opération par le calcul de… 5-4. Ce procédé ne donne pas à penser que 62 est conservé, parce qu'il est le diminuande de l'opération.
10. En France, la technique normalement enseignée est différente de celle que décrit Ma, puisque la retenue est ajoutée au diminueur, ce qui relève d'un autre type d'explication que l'on pourrait désigner comme « la conservation de la différence par translation » c'est-à-dire lors de l'addition d'une même quantité aux deux termes (dix unités au diminuande, une dizaine au diminueur). L'explication du procédé est délicate et se montre bien mieux dans le cadre d'un modèle algébrique qui ne peut être officiellement manipulé avant le Collège : (6d+2u) – (4d+9u) = (6d+12u) – (4d+1d+9u) = 6d+12u-5d-9u = (6d-5d)+(12u-9u) = 1d+3u.
11. C'est donc « plus concret relativement à la numération » c'est-à-dire que c'est un discours à fonction théorique et ce n'est pas la description de la manipulation d'un matériel substitutif servant de moyen de « démonstration ».
12. Cependant nous aurions dit : « students » parce que nous ne pensons pas que les processus de l'apprentissage dépendent d'abord de l'âge (ce qu'indique children) mais qu'ils sont plutôt dépendants de la position des sujets dans l'espace didactique (ce que students indique).
13. La Guadeloupe est, sur le plan administratif, un département-région français d'outremer. Le système éducatif y est organisé en très grande partie comme celui du territoire métropolitain de la France. En particulier, le plan d'études en mathématiques et la formation des professeurs y sont identiques.
14. Il paraît dangereux de conforter la procédure de Julie si elle a fait (40/5)×3 et si elle a vu 8 comme le quotient de 40 par 5. Il se trouve qu'ici 8 est à la fois 5+3 et 40/5. Cependant, le choix de ces trois nombres ne permet pas à Julie de remettre en doute sa conception, ceci tenant à la divisibilité de 40 par 5. Il y aurait moins de possibilités de confusion si on avait comme nombre d'élèves un multiple de 8 non divisible par 5. En effet avec un total de 48 élèves au lieu de 40, la stratégie de Julie conduit au maniement de nombres non entiers, ce qui n'est pas dans la logique de la situation évoquée.
15. Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et de la Vie associative. Livret personnel de compétences. Récupéré le 11 janvier 2012 du site du ministère : http://media.education.gouv.fr/file/27/02/7/livret_personnel_competences_149027.pdf.
16. La réponse fournie ne relève pas de la question. Nous n'obtiendrons bien sûr pas ce type de réponse dans le cadre d'un entretien semi directif.
17. Concours de recrutement de professeur des écoles.
18. Un(e) des relecteurs(trices) attentifs(ves) remarque ici : « Le problème peut aussi être traité par un graphique

comme on l'aurait fait quand j'étais à l'école primaire : 3 segments de même longueur pour représenter les garçons auquel on ajoute 5 segments de même longueur pour les filles : cela fait 8 segments : on marque 40 pour la longueur totale et on trouve 5 comme longueur d'un segment et donc la répartition 15, 25. Ce n'est pas la même chose que la première procédure avec les traits ni que celle de l'analyse-synthèse : cela donne une technique graphique pour traiter le raisonnement de l'analyse-synthèse et je dois dire que c'est encore comme cela que je traite mentalement un tel problème. » Ceci rappelle la méthode pré-algébrique indiquée par (Bolea, Bosch et Gascón, 1998), mais n'est pas apparu dans l'enquête.

19. Le théorème d'Euclide auquel nous faisons ici référence s'énonce ainsi : « Si p premier divise un produit ab et si p ne divise pas a, alors p divise b ». Il permet de démontrer que l'équation 5a=3b a des solutions entières et que l'on peut donc chercher dans l'ensemble fini de celles qui réalisent les deux conditions a<40 et b<40 les couples (a,b) vérifiant la condition a+b=40.

20.« Un nombre décimal est composé de deux entiers, l'un qui compte les unités, l'autre qui compte des centièmes » est une déclaration valide dans le cas du compte des euros, que l'on écrit en effet comme des décimaux, mais fausse dans le cas général des nombres décimaux. Nous dirons que c'est une théorie locale, parce qu'elle ne produit des comportements erronés que si l'on sort de son domaine d'application et des techniques associées comme par exemple, le compte avec un système de pièces (unités et centimes).

21. Par exemple, le Cours d'algèbre de Bertrand, donné à l'école Polytechnique dans les années 1890, a la forme d'un tel manuscrit polycopié.

22. L'usage du système métrique n'est pas en effet réponse universelle et caractérise la culture française de l'époque, bien qu'il soit réponse à un problème anthropologique universel, celui du lien entre système de numération et système des mesures de grandeurs.

23. Pour l'équation différentielle (2) y'=f(x,y) (où y' représente la dérivée de la fonction y de x) le théorème A affirme que: si f(x,y) est continue et admet une dérivée partielle continue par rapport à y dans B, par chaque point appartenant à B, il passe une courbe intégrale de l'équation (2) et une seule.

24. Nous rejoignons cependant un(e) de nos relecteurs(trices) pour dire que que l'on ne peut sans doute pas trouver des caractéristiques générales sur la place de la démonstration dans la compréhension profonde d'un théorème.

25. Le théorème A réapparaît sous une forme légèrement différente pour l'équation différentielle d'ordre n page 54.

26. Un de nos relecteurs(trices) note : « On voit bien sur cet exemple que ce qu'on va appeler des choses peut varier suivant le thème mathématique et suivant le niveau. Ces choses peuvent elles-mêmes être de nature mathématique. Il s'agit en particulier comme ici des ponts faits avec d'autres notions mathématiques : ils sont indiqués de manière suffisamment convaincante et efficace sans avoir besoin d'être formalisés (la formalisation, même si elle était possible, risquerait de faire perdre le fil et ne permettrait pas d'avoir le recul nécessaire). Ce substrat est essentiel. » Nous le(la) remercions pour cette remarque, qui montre que l'analyse d'un site mathématique local est relative à une institution, ce qui n'était pas le cas lorsque Duchet et Erdogan traitaient du site global d'un thème d'enseignement, un objet dont la complexité est bien plus grande.

RÉFÉRENCES

An, S., Kulm, G. et Wu, Z. (2004). The Pedagogical Content Knowledge of Middle School, Mathematics Teachers in China and U.S. *Mathematics Teacher Education*, 7(2), 145-172.

Assude, T., Sensevy, G. et Mercier, A.(2006). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(2), 221-252.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L. et Scali, E.(1995). *Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School. Proceedings of PME-XIX* (vol. 1, p. 151-166). Recife.

Bolea, P., Bosch, M. et Gascón, J. (1998). The role of algebraisation in the study of a mathematical organization. Dans Schwank, I. (éd.), *Proceedings of the 1st Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 1) (vol. 2, p. 135-145). Publication électronique 1999.

Briot, C. (1873). *Éléments d'Arithmétique (conformes aux programmes de l'enseignement scientifique des lycées)*. Paris : Delagrave (9e édition).

Brousseau, G. et Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11(2-3), 167- 210.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques en mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des Sciences de l'Education*, 30(2), 241-278.

Centeno, J. (1995). *La mémoire didactique de l'enseignant*. Bordeaux : LADIST.

Chambris, C. (2010). Relations entre les grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au XXe siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(3), 317-366.

Charbonnel, N. (1991). *La Tâche aveugle. L'important, c'est d'être propre*. Strasbourg : Presses Universitaires de Strasbourg.

Chevallard, Y. (1985a). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage (2e édition augmentée, 1991).

Chevallard, Y. (1985b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège. Première partie, L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège. Deuxième partie, La notion de modélisation. *Petit x*, 19, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège. Troisième partie, Voie d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 30, 5-15.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques,* 17(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19(2), 221-226.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Cours. Dans J.-L. Dorier *et al*. (éd.), *Actes de la XIe École d'été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras *et al*. (éd.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas* (p. 705-746). Jaén : Universidad de Jaén.

Duchet, P. et Erdogan, A. (2005). La construction du diagnostic d'un enseignement à partir d'une analyse épistémologique en termes de « site mathématique ». Dans Bosch, M. (éd.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4). Publication électronique 2006.

Durkheim, E. (1922). *Éducation et sociologie.* Paris : PUF (collection « Quadrige », 2005).

Erdogan, A. (2006). *Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques. Analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en seconde* (thèse de doctorat, université de Paris 7). Paris : IREM Paris 7.

Fleck, L. (1979). *The Genesis and Development of a Scientific fact*. Traduction de T.J. Trenn et R.K. Merto, Chicago : University of Chicago Press. (Ouvrage original publié en 1935 sous le titre *Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache. Einführung in die Lehre vom Denkstil und Denkkollektiv,* Basel : Schwabe und Co., Verlagsbuchhandlung.)

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matematico y analisis didactico : Del patron de analisis-sintesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques*, 13(3), 295-332.

Lemoine, A (1920). *160 leçons d'arithmétique*. Paris : Hachette (7e édition).

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics : Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* Studies in Mathematical Thinking and Learning. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Marijon, A. et Pequignot, A. (1922). *Arithmétique du brevet élémentaire*. Paris : Hatier (6e édition).

Matheron, Y. (2002). Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 207-246.

Matheron, Y. (2009). *Mémoire et étude des mathématiques. Une approche didactique à caractère anthropologique*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique* (thèse de doctorat, université de Bordeaux I). Marseille : IREM Aix-Marseille.

Mercier, A. (1996). La création d'ignorance, condition de l'apprentissage, à l'école. *Revue des Sciences de l'Education,* 22(2), 345-363.

Mercier A. (1997). La relation didactique et ses effets. Dans

C. Blanchard-Laville (dir.), *Variations autour d'une leçon de mathématiques à l'école élémentaire, l'écriture des grands nombres* (p. 185-230). Paris : L'Harmattan.

Mercier, A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique. *Éducation et didactique* (revue électronique), 2(1).

Mercier, A., Lemoyne, G., Rouchier, A. (2001). *Le génie didactique. Usages et mésusages des théories de l'enseignement.* Coll. Perspectives en éducation et formation. Bruxelles : De Boeck.

Mercier, A., Schubauer-Leoni, M-L., Matheron, Y., Quilio, S. et Leutenegger, F. (2003). Vers un modèle didactique de l'action ordinaire du professeur et de son système de décisions. Dans J-L. Dorier (éd.), *Actes de la XIe École d'Eté de Didactique des Mathématiques*, CD-ROM associé. Grenoble : La Pensée Sauvage.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Récupéré le 10 janvier 2012 du site de l'organisme : www.nctm.org/standards/ .

Pisot, C. et Zamansky, M. (1972). *Mathématiques générales. Tome 2 : nombres réels fonctions de variables réelles*. Monographies universitaires de mathématiques, Paris : Dunod.

Ramis, E., Deschamps, C. et Odoux J. (1979, 3e édition). *Cours de mathématiques spéciales*. Paris : Masson.

René de Cotret, S. (2007). *L'élève et le modèle proportionnel, une histoire de confitures*. Montréal : Éditions Bande Didactique, coll. « mathèse ».

Schubauer-Leoni, M. L. et Dolz, J. (2004). Comprendre l'action et l'ingéniosité didactique de l'enseignant : une composante essentielle de la transformation de l'École. Dans J.-P. Bronckart, M. Gather-Thurler (dir), *Transformer l'école* (p. 147-168). Raisons Educatives, Bruxelles : De Boeck Université.

Schubauer-Leoni, M.-L., Leutenegger, F. et Forget, A. (2007). L'accès aux pratiques de fabrication de traces scripturales convenues au commencement de la forme scolaire. *Education et didactique, 1(2)*, 9-35.

Sensevy, G., (2011). *Le sens du savoir. Eléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Sensevy, G., Mercier, A. et Schubauer-Leoni, M.-L. (2000). Esquisse d'un modèle de l'action didactique du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(3), 253-295.

Sensevy, G. et Mercier, A. (dir.) (2007). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Shulman, L. (1986). Those who understand : Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Shulman, L. S. (2007). Ceux qui comprennent. Le développement de la connaissance dans l'enseignement (G. Sensevy et C. Amade-Escot Trad.). *Éducation et didactique, 1*, 103-126. (Édition originale, 1986).

Silvy, C. et Delcroix, A. (2009). Site mathématiques d'une ROC, une nouvelle façon d'interroger un exercice. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 14, 103-122.

Smirnov, V. (1970). *Cours de mathématiques supérieures, tome 2*. Moscou : éditions Mir.

Stevin, S. (1634). *Les Œuvres Mathématiques de Simon Stevin de Bruges. Le tout revu corrigé et augmenté par Albert Girard Samielois, Mathématicien*. Leiden : Bonaventure et Elzevier.

Stigler, J. W. et Perry, M. (1988). Cross-cultural studies of mathematics teaching and learning : Recent findings and new directions. Dans D. A. Grouws et T. J. Cooney (éd.), *Effective mathematics teaching* (p. 194- 223). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.